Correction Baccalauréat ES Liban
31 mai 2010

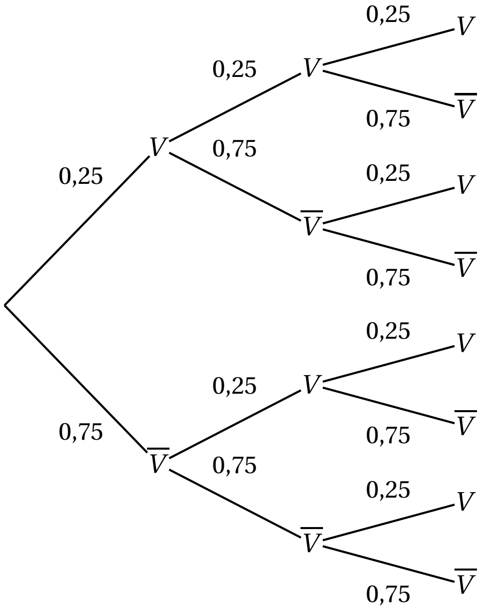
Exercice 1 **4 points**

1. A et B sont deux évènements indépendants donc $p(A\cap B) = p(A)\times p(B) = 0,1$
   et comme $p(A\cup B) = p(A) + p(B) - p(A\cap B = 0,6$ **Réponse C**
2. En appelant S l'évènement « Le cahier est à spirale » et C l'évènement « Le cahier est à gros carreaux » on a

$$p_S(C) = \frac{p(S\cap C)}{P(S)} = \frac{P(C)\times P_{(}S)}{P(S)} = \frac{0,75\times 0,4}{0,5} = 0,6$$

Réponse C

3. La loi numérique correspondant au nombre de stylos-feutres verts est une loi binomiale. Il faut faire un arbre :



On cherche la probabilité de l'évènement contraire de « On a obtenu aucun stylo vert » donc

$$p = 1 - 0,75^3 \approx 0,578$$

Réponse C

4. Sur l'arbre, il y a trois chemins de même probabilité qui donnent 2 stylos verts donc

$$p = 3\times 0,25^2\times 0,75 \approx 0,141$$

Réponse C

Exercice 2 **5 points**

1. **a.** $\boxed{g(0) = 6}$

   b. $g'(0)$ est le coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse 0. Il vaut $\boxed{g'(0) = \dfrac{y_F - y_E}{x_F - x_E} = -2}$

   c. Pour tout réel on a :

$$g'(x) \;=\; 1 + ak\mathrm{e}^{ax}$$

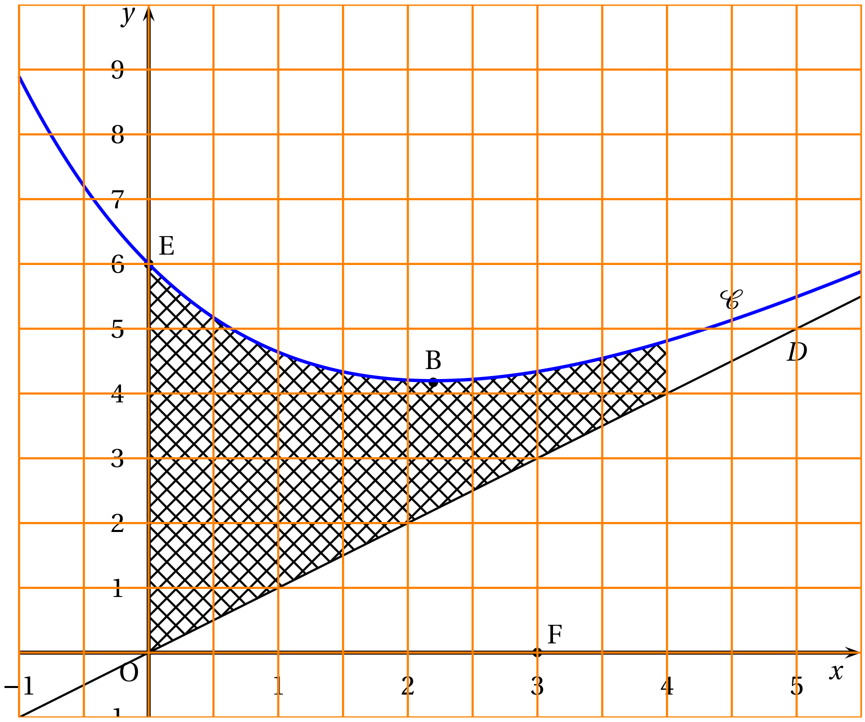
   d. Les réels a et k vérifient le sytème suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcl} g(0) &=& 6\\ g'(0) &=& -2\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} 0 + k\mathrm{e}^0 &=& 6\\ 1 + ak\mathrm{e}^0 &=& -2\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} k &=& 6\\ 1 + 6a &=& -2\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} k &=& 6\\ a &=& \frac{-3}{6} = -0,5\end{array}\right.$$

2. On a $g(x) - x = 6\mathrm{e}^{-0,5x}$ or $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-0,5x} = \lim\limits_{X\to-\infty} \mathrm{e}^{X} = 0$

On a $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \left(g(x) - x\right) = 0}$, ce qui montre que la droite D est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$ en $+\infty$.

3. **a.** *graphique*



b. On a :

$$\begin{aligned}
\int_0^4 g(x) - x\mathrm{d}x &= \int_0^4 6\mathrm{e}^{-0,5x}\mathrm{d}x \\
&= \left[\frac{6}{-0,5}\mathrm{e}^{-0,5x}\right]_0^4 \\
&= \left[-12\mathrm{e}^{-0,5x}\right]_0^4 \\
&= 12 - 12\mathrm{e}^{-2} \\
&\approx 10,38
\end{aligned}$$

Or l'unité d'aire vaut 2×1 cm^2 donc

$\boxed{\text{L' aire du domaine vaut } 24 - 24\mathrm{e}^{-2} \text{ cm}^2 \text{ soit environ } 20{,}8 \text{ cm}^2}$

4. Le point B est le point qui correspond au minimum de la fonction, en ce point la tangente est horizontale, donc la dérivée s'annule en x_{B}. On doit donc résoudre l'équation :

$$\begin{aligned}
g'(x) &= 0 \\
1 + 6 \times (-0,5) \times \mathrm{e}^{-0,5x} &= 0 \\
1 - 3\mathrm{e}^{-0,5x} &= 0 \\
1 &= 3\mathrm{e}^{-0,5x} \\
\frac{1}{3} &= \mathrm{e}^{-0,5x} \\
\ln\left(\frac{1}{3}\right) &= -0,5x \\
\ln 3 &= 0,5x \\
x &= 2\ln 3
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{Le point B a pour abscisse } 2\ln 3}$.

Exercice 3 **6 points**

Partie A

1. **a.** $\lim\limits_{x\to 0} 3\mathrm{e}^2 - x = 3\mathrm{e}^2$ qui est positif et $\lim\limits_{x\to 0} \ln x = -\infty$ donc $\boxed{\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty}$

b. On a :

$$\begin{aligned} f\left(e^2\right) &= \left(3e^2 - e^2\right)\ln\left(e^2\right) + 10\\ &= 2e^2 \times 2 + 10\\ &= 4e^2 + 10\\ &\approx 39{,}556\end{aligned}$$

2. La fonction f est de la forme $uv + 10$ avec

$$\begin{aligned} u(x) &= 3e^2 - x\\ v(x) &= \ln x\end{aligned} \quad \text{et} \quad \begin{aligned} u'(x) &= -1\\ v'(x) &= \frac{1}{x}\end{aligned}$$

Donc pour pour tout réel x on a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= (-1) \times \ln x + \left(3e^2 - x\right) \times \frac{1}{x}\\ &= -\ln x + \frac{3e^2}{x} - 1\end{aligned}$$

3. **a.** Comme la fonction dérivée f' est strictement décroissante sur $]0~;~20]$ et s'annule en e^2, elle est strictement positive sur $\left]0~;~e^2\right[$ et strictement négative sur $\left]e^2~;~20\right]$.

b. On en déduit le tableau suivant :

x	0		e^2		20
$f'(x)$	||	$+$	0	$-$	
$f(x)$	|| $-\infty$	$\nearrow$	$f\left(e^2\right)$	$\searrow$	$f(20)$

4. **a.** Sur l'intervalle $[0{,}6~;~0{,}7]$, la fonction f est continue et strictement croissante, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, elle prend une seule fois toutes les valeurs de l'intervalle $[f(0{,}6)~;~f(0{,}7)]$ or $f(0{,}6) \approx -1{,}02$ et $f(0{,}7) \approx 2{,}34$, ils sont de signes différents donc l'équation $f(x) = 0$ possède une unique solution α.

En utilisant le tableau de la calculatrice on trouve que $f(x)$ change de signe entre 0,628 et 0,629 donc

$$\boxed{\alpha \approx 0{,}629 \text{ à } 0{,}001 \text{ près par excès.}}$$

b. Comme la fonction f est strictement croissante sur $\left]0~;~e^2\right[$ et s'annule en α, elle est strictement négative sur $]0~;~\alpha[$ et strictement positive sur $\left]\alpha~;~e^2\right]$.

De plus, $f(20) \approx 16{,}49$ donc $f(x)$ reste positif sur $\left[e^2~;~20\right]$.

Partie B

1. D'après la partie A, pour que $f(x)$ soit positif il faut que $x > \alpha$.

$$\boxed{\text{Il faut donc produire au moins 629 DVD pour que le bénéfice soit positif.}}$$

2. D'après la partie A, f admet un maximum lorsque $x = e^2 \approx 7{,}389$ et ce maximum vaut $f\left(e^2\right) \approx 39{,}56$.

$$\boxed{\text{L'entreprise doit produire 7389 DVD pour réaliser un bénéfice maximal de 39 560 €}}$$

Exercice 4 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1. **a.** Appelons t_m le taux moyen entre 2004 et 2008, on a donc

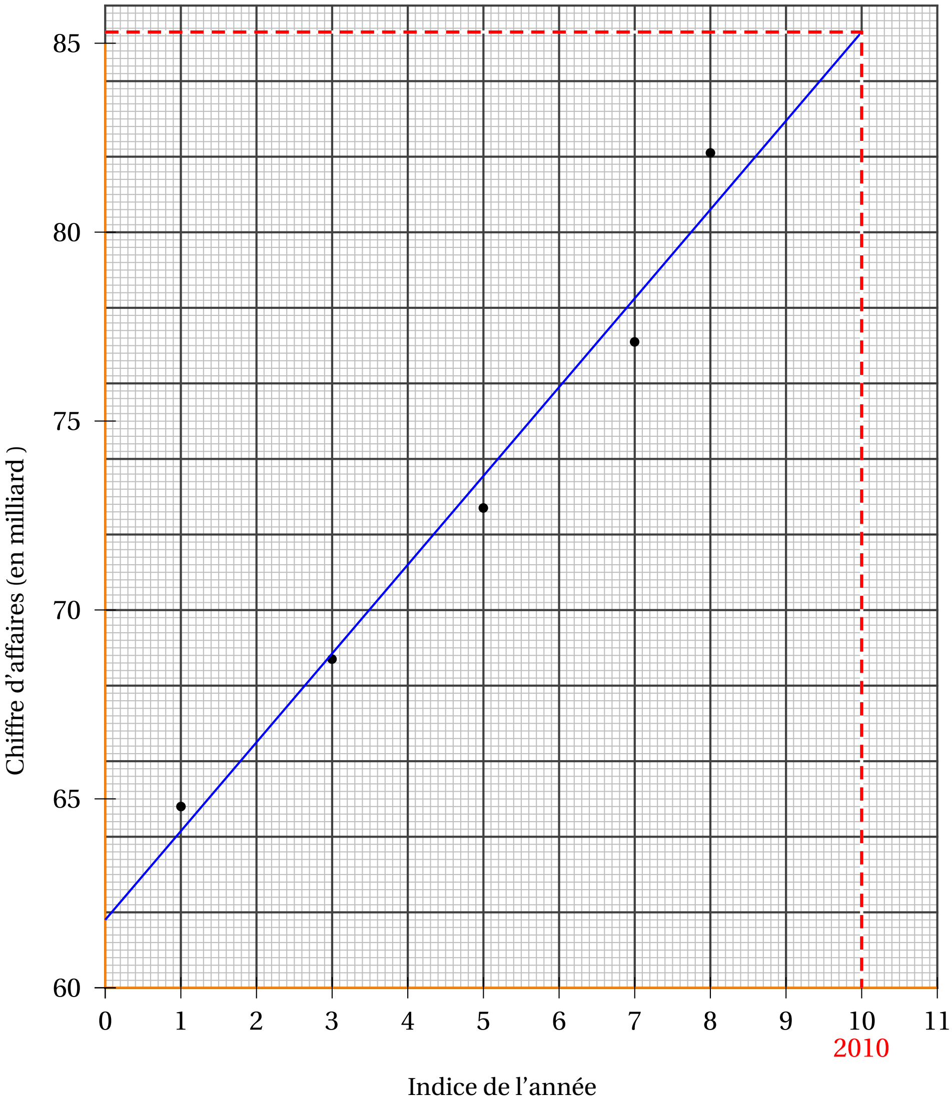
$$\begin{aligned} (1 + t_m)^5 &= (1 + 0{,}047)(1 + 0{,}106)(1 + 0{,}041)(1 + 0{,}058)(1 + 0{,}075)\\ (1 + t_m)^5 &\approx 1{,}371\\ 1 + t_m &\approx 1{,}371^{\frac{1}{5}}\\ 1 + t_m &\approx 1{,}065\\ t_m &\approx 0{,}065\end{aligned}$$

$\boxed{\text{Le taux moyen d'augmentation est de 0,065 c'est à dire } 6,5\%.}$

b. Entre 2008 et 2010, le chiffre d'affaires va être multiplié par $\left(1+\frac{6,5}{100}\right)^2$.
Donc $C_a = 59,5 \times 1,065^2 \approx 67,5$

$\boxed{\text{On peut estimer à 67,5 milliards d'euros le chiffre d'affaires du groupe pour l'année 2010}}$

2. **a.** *Graphique*



b. A l'aide de la calculatrice, par la méthode des moindres carrés, l'équation de la droite d'ajustement affine est $y = 2,35x + 61,8$.

c. Graphiquement on peut lire que le chiffre d'affaires du groupe Aupré pour l'année 2010 sera 85,3 milliards d'euros

3. **a.** On a :

$$\begin{aligned}
59,5 \times 1,065^n &> 82,1 \times 1,03^n \\
\frac{1,065^n}{1,03^n} &> \frac{82,1}{59,5} \\
\left(\frac{1,065}{1,03}\right)^n &> \frac{82,1}{59,5} \\
n \ln\left(\frac{1,065}{1,03}\right) &> \ln\left(\frac{82,1}{59,5}\right) \\
n &> \frac{\ln\left(\frac{82,1}{59,5}\right)}{\ln\left(\frac{1,065}{1,03}\right)}
\end{aligned}$$

Or $\dfrac{\ln\left(\frac{82,1}{59,5}\right)}{\ln\left(\frac{1,065}{1,03}\right)} \approx 9,63$.

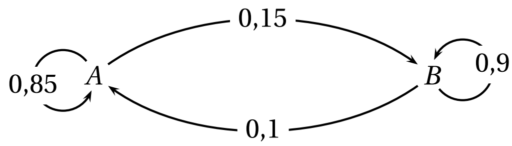
On a donc $\boxed{59,5 \times 1,065^n > 82,1 \times 1,03^n \text{ lorsque } n \geqslant 10}$

b. On en déduit que le chiffre d'affaires du groupe Enville dépassera celui du groupe Aupré au bout de 10 années c'est à dire à partir de 2018.

Exercice 4 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. **a.** Voici le graphe probabiliste représentant la situation.



b. La matrice de transition associée à ce graphe est donc

$$M = \begin{pmatrix} 0,85 & 0,15 \\ 0,1 & 0,9 \end{pmatrix}.$$

2. À l'aide de la calculatrice, on trouve

$\boxed{M^3 \simeq \begin{pmatrix} 0,653 & 0,347 \\ 0,231 & 0,769 \end{pmatrix}.}$

La répartition des téléspectateurs est donnée par P_4. Or $P_4 = P_1 M^3$. Donc, à l'aide de la calculatrice, on trouve

$$P_4 \simeq \begin{pmatrix} 0,526 & 0,474 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, $52,6\%$ des téléspectateurs regarderont la chaîne A
et $47,4\%$ regarderont la chaîne B lors de la quatrième semaine [1].

3. **a.** Puisque $PM = \begin{pmatrix} 0,85a + 0,1b & 0,15a + 0,9b \end{pmatrix}$, et en utilisant le fait que $a + b = 1$, on a à résoudre le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcl} P &=& PM \\ a+b &=& 1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} a &=& 0,85a+0,1b \\ b &=& 0,15a+0,9b \\ a+b &=& 1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} 0,15a &=& 0,1b \\ 0,1b &=& 0,15a \\ a &=& 1-b \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} 0,15a &=& 0,1b \\ a &=& 1-b \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} 0,15(1-b) &=& 0,1b \\ a &=& 1-b \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} 0,15 &=& 0,25b \\ a &=& 1-b \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} b &=& 0,6 \\ a &=& 0,4. \end{array}\right.$$

On a donc $\boxed{a = 0,4 \text{ et } b = 0,6.}$

b. Lorsque $P = PM$, cela signifie que l'on est dans un état stable du système. C'est vers cet état que la suite (P_n) va converger.

Ainsi, au bout d'un certain nombre de semaines, la répartition des téléspectateurs sera très proche de 40% pour la chaîne A et de 60% pour la chaîne B.

1. Si on a gardé la valeur exacte de M^3 pour le calcul de P_4, on trouve $0,527$ et $0,473$ comme valeurs arrondies à 10^{-3}.

4. **a.** Résolvons l'inéquation $a_n < 0,5$.

$$\begin{aligned} a_n < 0,5 &\iff & 0,4+0,3\times 0,75^{n-1} &< 0,5\\ &\iff & 0,3\times 0,75^{n-1} &< 0,1\\ &\iff & 0,75^{n-1} &< \frac{1}{3}\\ &\iff & \ln\left(0,75^{n-1}\right) &< \ln\left(\frac{1}{3}\right)\\ &\iff & (n-1)\ln(0,75) &< \ln\left(\frac{1}{3}\right)\\ &\iff & n-1 &> \frac{\ln(\frac{1}{3})}{\ln(0,75)}\\ &\iff & n &> 1+\frac{\ln(\frac{1}{3})}{\ln(0,75)}. \end{aligned}$$

Or, $1+\dfrac{\ln(\frac{1}{3})}{\ln(0,75)} \simeq 4,8$. Puisque n est un entier naturel,

$\boxed{a_n < 0,5 \iff n \geq 5.}$

b. Puisque a_n représente la proportion de téléspectateurs regardant la chaîne A, résoudre $a_n < 0,5$ revient à savoir quand la proportion de téléspectateurs de A sera inférieure à celle de B.

D'après la réponse précédente, l'audience de l'émission de la chaîne B dépassera celle de la chaîne A lors de la 5^e^ semaine.

Corrigé de Paul Duprat (Relecture et spécialité : R. Danflous)